$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$

oder

Das Entsetzen eines Physikers

Peter Gallin, Kantonsschule Zürcher Oberland, 8620 Wetzikon

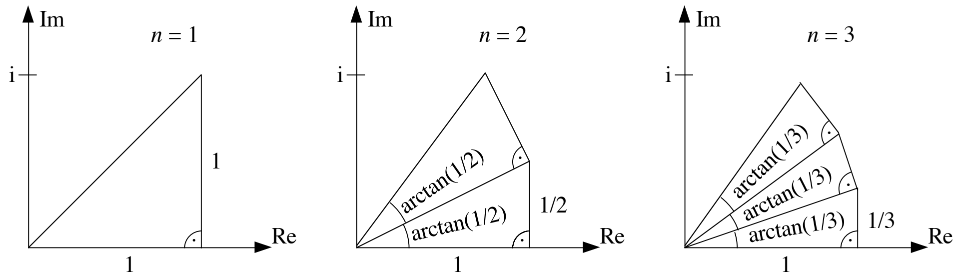
„Ist es denn denkbar, dass Schülerinnen und Schüler im mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil nicht wissen, was $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ ist?“, fragte mich kürzlich ein Physiklehrerkollege, der in seinem PAM-Kurs (Physik und Anwendungen der Mathematik) mit Entsetzen diesen Mangel festgestellt hat. Sogleich kam mir dann auch der Hochschulphysiker in den Sinn, der vor einigen Jahren vermeintlich ganz bescheiden meinte: „Wissen Sie, in der Mittelschule können sie im Mathematikunterricht machen, was Sie wollen, wir fangen an der Hochschule so oder so ganz vorne an und setzen im Prinzip nichts voraus, ausser vielleicht, dass die Schülerinnen und Schüler natürlich wissen, was $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ ist.“ Und diese Aussage galt wohlverstanden für alle Gymnasiastinnen und Gymnasiasten, nicht nur für jene des ehemaligen Maturitätstypus C. Damals dachte ich, er mache einen Scherz. Heute aber merke ich, dass tatsächlich nur das Gymnasium die Aufgabe erfüllen kann, den Lernenden verständlich zu machen, was $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ ist.

Ein Blick in die weit verbreitete Aufgabensammlung Algebra 3 (Orell Füssli Verlag, Zürich 2000) macht schnell klar, dass selbst in diesem für leistungsstarke Klassen gedachten Band der Ausdruck $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ einfach totgeschwiegen wird. Dafür stolpert man immer wieder über die didaktische Notlösung $\mathrm{cis}\phi$, bei der jeder Physiker für einen Moment grosse Augen macht.

Kurz: Es geht nicht an, dass wir Mathematiklehrer und -lehrerinnen uns weiterhin darum drücken $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ einzuführen. Zumindest im mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil ist es unsere Pflicht, die zukünftigen Studentinnen und Studenten angemessen auf die Hochschule vorzubereiten, und dazu gehört tatsächlich, wie der Hochschulphysiker es halb im Scherz forderte, dass wir nicht $\mathrm{cis}\phi$, sondern $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ einführen und verwenden. Wohl bedachte er mit seiner Forderung nicht, dass damit fast der ganze vorinfinitesimale Stoffplan des Gymnasiums automatisch gefüllt ist.

Die Hemmung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ anstelle von $\mathrm{cis}\phi$ zu verwenden stammt vermutlich aus der Sorge, einen strengen Beweis für die Gleichung $\mathrm{cis}\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ kaum erbringen zu können, ohne nicht auch noch die Infinitesimalrechnung mit ihren Reihenentwicklungen mobilisieren zu müssen. Es ist sicher wahr, dass für viele Schülerinnen und Schüler der Beweis dieser Gleichung über unendliche Reihen mit komplexen Summanden sehr fern vorkommt und wenig einleuchtet. Darum möchte ich hier einen Weg zu dieser Gleichung vorschlagen, der wenigstens intuitiv einleuchtet, auch wenn er nicht zu einem strengen Beweis ausgebaut wird.

Man startet mit der Feststellung, dass alle Grundrechenoperationen im Körper der reellen Zahlen uneingeschränkt auch im Komplexen gelten (Permanenzprinzip). Ferner erinnert man an die Festlegung der reellen Zahl e als $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Dieser Grenzwert wird zuerst für positive, dann auch für negative Zahlen a verallgemeinert auf $\mathrm{e}^a = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n$. Das ist eine „Exponentiermaschine“, weil sie es schafft, die Zahl a von der Hauptschreiblinie in die Exponentenschreiblinie zu hieven. Mit ihrer Hilfe gelingt es, auch eine komplexe Zahl auf die Exponentenschreiblinie zu bringen. Deshalb ist die Definition $\mathrm{e}^{\mathrm{i}} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{\mathrm{i}}{n})^n$ durchaus einleuchtend, nachdem ja das Permanenzprinzip gilt. Jetzt stellt sich die Frage, welche komplexe Zahl denn e^{i} ist. Dazu muss man die Folge $(1+\mathrm{i})^1$, $(1+\frac{\mathrm{i}}{2})^2$, $(1+\frac{\mathrm{i}}{3})^3$, … betrachten, und man tut dies am besten rein geometrisch in der Gauss'schen Zahlenebene.



Wie man aus der Figur erkennt, werden mit wachsendem n immer mehr rechtwinklige, zueinander ähnliche Dreiecke in der Weise aufeinander geschichtet, dass die Hypotenuse eines unteren Dreiecks zur langen Kathete des oberen wird. Es leuchtet ein, dass für grosse n die Hypotenusen zwar immer leicht grösser als 1 sind, sich aber beliebig nahe an 1 heranbringen lassen. Die Summe aller kleinen Katheten ist (ausser für $n = 1$) ebenfalls grösser als 1, nähert sich aber auch von oben dem Grenzwert 1, weil die Länge der kleinen Kathete des untersten Dreiecks immer $\frac{1}{n}$ beträgt und man n Dreiecke aufeinander schichtet, die sich nur ganz leicht vergrössern. Daraus ergibt sich, dass der Punkt $(1 + \frac{\mathrm{i}}{n})^n$ sich bei wachsendem n von aussen dem Einheitskreis nähert und zwar zu jener Stelle, die das Bogenmass 1 als Argument hat. Also gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}} = \cos(1) + \mathrm{i} \cdot \sin(1)$. Da man schon weiss, was das Potenzieren einer komplexen Zahl mit einem rellen Exponenten ϕ bedeutet (nämlich: potenziere den Betrag mit ϕ und multipliziere das Argument mit ϕ), ergibt sich $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^{\phi} = 1^{\phi} \cdot (\cos(1 \cdot \phi) + \mathrm{i} \cdot \sin(1 \cdot \phi))$. Damit ist die Gleichung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{cis}\phi$ plausibel gemacht, womit die Abkürzung $\mathrm{cis}\phi = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$ definitiv zu Grabe getragen werden kann. Mein verehrter Mathematikprofessor Peter Henrici an der ETH meinte damals in der zugehörigen Grabrede lakonisch: „Als Abkürzung hat $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ erst noch den Vorteil, einen Buchstaben weniger als $\mathrm{cis}\phi$ zu haben.“