Die Wiedergeburt der Fibonacci-Zahlen

Peter Gallin, Kantonsschule Zürcher Oberland, 8620 Wetzikon

Gerne sagt man im Mathematikunterricht, dass es zu schwierig sei, eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen herzuleiten. Ein Grund dafür könnte sein, dass es in der Mathematik üblich ist, alle Probleme von einem möglichst allgemeinen Standpunkt aus darzustellen, mit dem Ziel, viele einzelne Spezialfälle in einem Zug behandelt zu haben.[1] Der Preis dafür ist, dass erstens das einzelne Phänomen unter Umständen in der Allgemeinheit untergeht und zweitens die hohe Allgemeinheit oft Techniken voraussetzt, die für die Lernenden in der Schule unerreichbar sind. Ich möchte hier zeigen, dass die Herleitung der expliziten Formel für die Fibonacci-Zahlen (Formel von Binet) absolut elementar und kurz zu schaffen ist.

Beginnen wir mit der Folge $\{f_n\}$ der Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , deren Glieder wir durch die Festlegung $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ nummerieren. Zusammen mit dem Rekusionsgesetz $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für natürliches $n > 2$ ergibt sich die Folge. Bildet man die Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen und vertraut aufgrund von numerischen Experimenten, dass dieser Quotient für immer grösser werdende n zu einem Grenzwert konvergiert, kann man durch Division des obigen Rekursionsgesetzes durch f_{n-1} die Beziehung

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}$$

erhalten. Für sehr grosse n identifizieren wir $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ und $\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}$ und schreiben dafür den Grenzwert τ. Damit gilt für τ die Beziehung

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau} \quad \text{oder} \quad \tau^2 = 1 + \tau \ .$$

Einerseits liegt also eine quadratische Gleichung für τ vor, deren Lösungen wir mit

$$\tau_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

angeben können (nur die positive Lösung τ_1 taugt als Grenzwert der obigen Quotientenfolge), andererseits besagt diese Beziehung, dass jede natürliche Potenz von τ reduziert werden kann auf eine Summe aus einer natürlichen Zahl und einer bestimmten Anzahl von τ. Dies erkennt man so:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\tau^3 & = & \tau\cdot\tau^2 & = & \tau(1+\tau) & = & \tau+\tau^2 & = & \tau+(1+\tau) & = & 1+2\tau \\
\tau^4 & = & \tau\cdot\tau^3 & = & \tau(1+2\tau) & = & \tau+2\tau^2 & = & \tau+2(1+\tau) & = & 2+3\tau \\
\tau^5 & = & \tau\cdot\tau^4 & = & \tau(2+3\tau) & = & 2\tau+3\tau^2 & = & 2\tau+3(1+\tau) & = & 3+5\tau \\
\tau^6 & = & \tau\cdot\tau^5 & = & \tau(3+5\tau) & = & 3\tau+5\tau^2 & = & 3\tau+5(1+\tau) & = & 5+8\tau \\
 & & & & & & \text{usw.} & & & &
\end{array}$$

Auch ohne Induktionsbeweis ist das hier gezeigte Entwicklungsschema derart durchschaubar, dass man sofort folgern kann:

$$\tau^n = f_{n-1} + f_n \cdot \tau$$

Das Überraschende ist also, dass in der Zahl τ die Fibonacci-Zahlen immer noch stecken: Durch Potenzieren gebiert die Zahl τ die Fibonacci-Zahlen wieder. Da die Beziehung $\tau^2 = 1 + \tau$ sowohl für τ_1 als auch für τ_2 gilt, erhalten wir also zwei Gleichungen für die zwei „Unbekannten“ f_{n-1} und f_n:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \tau_1^n & = & f_{n-1} + f_n \cdot \tau_1 \\ \tau_2^n & = & f_{n-1} + f_n \cdot \tau_2 \end{array} \right\}$$

Subtrahieren wir die beiden Gleichungen voneinander, ergibt sich $\tau_1^n - \tau_2^n = f_n(\tau_1 - \tau_2)$, woraus

$$f_n = \frac{\tau_1^n - \tau_2^n}{\tau_1 - \tau_2}$$

folgt. Beachtet man, dass $\tau_1 - \tau_2 = \sqrt{5}$, erhalten wir die gesuchte explizite Formel für f_n:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

[1] Siehe beispielsweise Bulletin des VSMP Nr. 104, Seiten 5-7