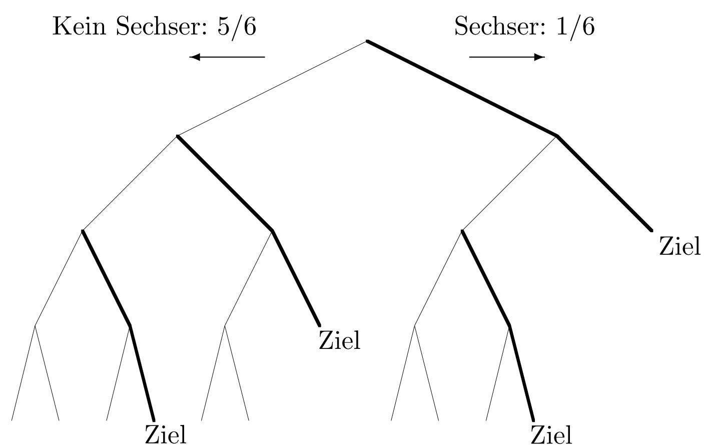
Teilweise publiziert in: Die Wurzel, Jena, Heft Juni 09, Seiten 130–137

Erleichterung durch Markow-Prozesse

Peter Gallin, Universität Zürich

Wie oft wird man einen Würfel werfen müssen, bis man zweimal oder dreimal hintereinander eine Sechs erhält? Diese harmlos tönenden Fragen haben es in sich. Wir versuchen sie zuerst klassisch, das bedeutet mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum, zu lösen. Gesucht ist also ein Erwartungswert der Länge eines Weges bis zu einem Ziel. Beschränken wir uns zuerst auf den Fall von zwei Sechsern.

1. Der Fall eines Doppelsechsers



Aus diesem Baum erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeit, in zwei Schritten zum Ziel zu gelangen $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ beträgt. Damit wir im Folgenden besseren Überblick behalten können, setzen wir $a = \frac{1}{6}$ und $b = \frac{5}{6}$. Damit können wir den Erwartungswert E der Anzahl Schritte bis zum Ziel folgendermassen ansetzen:

$$E = 2 \cdot a^2 + 3 \cdot ba^2 + 4 \cdot (aba^2 + b^2a^2) + 5 \cdot (ab^2a^2 + baba^2 + b^3a^2) + \ldots$$

Besseren Überblick über das Bildungsgesetz hinter den Polynomen in den Klammern erhalten wir durch Ausklammern des obligaten Faktors a^2 und Zusammenfassen gleichartiger Produkte in den nachfolgend definierten Polynomen P_k $(k \geq 0)$:

$$E = 2a^2 + 3a^2 \cdot b + 4a^2 \cdot (ab + b^2) + 5a^2 \cdot (2ab^2 + b^3) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \cdot a^2 \cdot P_k$$

Dabei gilt: $P_0 = 1$, $P_1 = b$, $P_2 = ab + b^2$, $P_3 = 2ab^2 + b^3$. Man beachte, dass die zu P_k gehörigen Wege k Schritte lang sind und am Schluss ein Nicht-Sechser geworfen wird, bevor dann die zwei Sechser aus ihm einen $(k+2)$-schrittigen Weg zum Ziel machen. Nun lautet die Frage, wie man denn das nachfolgende Polynom P_4 erhalten kann, ohne den Baum umständlich erweitern zu müssen. Dies ist rekursiv möglich, wenn man bedenkt, dass alle Wege, die nach zwei Schritten nicht zum Ziel geführt haben und am Schluss einen Nicht-Sechser aufweisen, mit dem Werfen eines Sechsers und dann eines Nicht-Sechsers auf die Länge vier verlängert werden können, so dass am Schluss ein Nicht-Sechser steht. Kurz: Man kann sicher einmal $P_2 \cdot ab$ bilden um einen ersten Summanden von P_4 zu erhalten. Aber auch die Wege, die nach drei Schritten nicht zum Ziel geführt haben und am Schluss einen Nicht-Sechser haben können mit dem Werfen eines Nicht-Sechsers auf die Länge vier gebracht werden, so dass am Schluss ein Nicht-Sechser steht: $P_3 \cdot b$. Zusammen ergibt dies: $P_4 = P_3 \cdot b + P_2 \cdot ab = (2ab^2 + b^3) \cdot b + (ab + b^2) \cdot ab = a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$. Dies ist aber das Muster für das allgemeine Rekursionsgesetz

$$P_k = P_{k-1} \cdot b + P_{k-2} \cdot ab$$

Dieses Rekursionsgesetz garantiert, dass die Polynome P_k homogen vom Grad k bleiben. Es erinnert an die verallgemeinerte Fibonacci-Rekursion. Bei der Ermittlung einer möglichst geschlossenen Darstellung der Koeffizienten dieser Polynome drängt sich natürlich das Verfahren des Pascal-Dreiecks auf. Stellen wir die ersten Polynome geeignet untereinander, erkennen wir das Bildungsgesetz.

$$
\begin{array}{llllllll}
k=0 & 1 & & & & & & \\
k=1 & 0\cdot a & 1\cdot b & & & & & \\
k=2 & 0\cdot a^2 & 1\cdot ab & 1\cdot b^2 & & & & \\
k=3 & 0\cdot a^3 & 0\cdot a^2b & 2\cdot ab^2 & 1\cdot b^3 & & & \\
k=4 & 0\cdot a^4 & 0\cdot a^3b & 1\cdot a^2b^2 & 3\cdot ab^3 & 1\cdot b^4 & & \\
k=5 & 0\cdot a^5 & 0\cdot a^4b & 0\cdot a^3b^2 & 3\cdot a^2b^3 & 4\cdot ab^4 & 1\cdot b^5 & \\
k=6 & 0\cdot a^6 & 0\cdot a^5b & 0\cdot a^4b^2 & 1\cdot a^3b^3 & 6\cdot a^2b^4 & 5\cdot ab^5 & 1\cdot b^6
\end{array}
$$

Jedes Glied einer Zeile entsteht als Summe des darüber stehenden Gliedes der vorvorhergehenden Zeile, welches mit ab multipliziert wird, und des links darüber stehenden Gliedes der vorhergehenden Zeile, welches mit b multipliziert wird. So entstehen die Koeffizienten des normalen Pascal-Dreiecks, bloss schief verzerrt: Seine Zeilen laufen im oberen Schema von links unten nach rechts oben. Damit erkennt man, dass die gesuchten Koeffizienten der Polynome P_k die üblichen Binomialkoeffizienten sind, nur in einer ungewöhnlichen Reihenfolge benützt, nämlich in jener Schiefe, in der man die Fibonacci-Zahlen im Pascal-Dreieck aufsummiert. Man erhält

$$P_k = \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \binom{k-i}{i} a^i b^{k-i} \ .$$

Damit können wir nun den gesuchten Erwartungswert E der Anzahl Würfe bis zu einer Doppelsechs ausdrücken durch

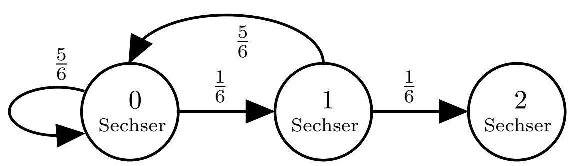
$$E = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\cdot a^2 \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \binom{k-i}{i} a^i b^{k-i} \ .$$

Mit der Software Mathematica ergibt der folgende Term (bei Summation bis $k = 500$)

```
N[Sum[(k + 2) ⋆ a ∧ 2 ⋆ Sum[Binomial[k − i, i] ⋆ a ∧ i ⋆ b ∧ (k − i), {i, 0, Floor[k/2]}], {k, 0, 500}]]
```

den Wert 41.9976.

Nun ist es umso erstaunlicher, dass dieser Erwartungswert mit den Gesetzen des **Markow-Prozesses** beinahe trivial zu berechnen ist. In der folgenden Kette ist ein Startzustand mit 0 Sechsern, ein Zwischenzustand mit 1 Sechser und ein Zielzustand mit 2 Sechsern gezeigt. Zudem sind die Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen.



Gesucht ist nun der Erwartungswert E der Anzahl Schritte, die man benötigt, um vom Zustand 0 in den Zustand 2 zu gelangen. Da dieser Erwartungswert vorläufig noch nicht berechnet werden kann, betrachten wir den Erwartungswert E_1 der Anzahl Schritte, die man benötigt, um vom Zustand 1 in den Zustand 2 zu gelangen. Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ gelangt man mit einem einzigen Schritt ins Ziel und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ fällt man in einem einzigen Schritt zum Start zurück, von wo aus man (im Mittel) mit E Schritten ins Ziel gelangt. Also gilt

$$E_1 = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot(1+E) = 1 + \frac{5}{6}\cdot E$$

Nun könnnen wir die analogen Überlegungen für den Zustand 0 anstellen und dann E_1 einsetzen:

$$E = \frac{1}{6}\cdot(1+E_1) + \frac{5}{6}\cdot(1+E) = 1 + \frac{1}{6}\cdot E_1 + \frac{5}{6}\cdot E = 1 + \frac{1}{6}\cdot(1+\frac{5}{6}\cdot E) + \frac{5}{6}\cdot E = \frac{7}{6} + \frac{35}{36}\cdot E$$

Und dies ist eine Gleichung für E, welche sofort $E = 42$ liefert.

2. Der Fall eines Dreifachsechsers

Das Vorgehen ist völlig analog zum vorangehenden Fall. Wir stellen uns den Baum nur noch vor und können gleich den Erwartungswert der Anzahl Schritte bis zum Ziel — zumindest die ersten paar Glieder der Summe — ansetzen. Zunächst entspricht also jedem Faktor a dem Werfen eines Sechsers und jedem Faktor b dem Werfen eines Nicht-Sechsers und zwar in der Reihenfolge des Auftretens im Baum:

$$E = 3 \cdot a^3 + 4 \cdot ba^3 + 5 \cdot (aba^3 + b^2a^3) + 6 \cdot (a^2ba^3 + baba^2 + ab^2a^3 + b^3a^3) + \dots$$

Durch Ausklammern von a^3 und Zusammenfassen erhalten wir:

$$E = 3a^3 + 4a^3 \cdot b + 5a^3 \cdot (ab + b^2) + 6a^3 \cdot (a^2b + 2ab^2 + b^3) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)a^3 \cdot P_k \ ,$$

wobei die Polynome P_k nun eine neue Bedeutung erhalten haben: $P_0 = 1$, $P_1 = b$, $P_2 = ab + b^2$, $P_3 = a^2b + 2ab^2 + b^3$. Wie im vorangehenden Fall mit den Doppelsechsern beginnen wir die Nummerierung der Polynome bei Null. Somit gibt der Index an, wie viele Schritte ausgeführt werden, *bevor* die drei Sechser geworfen werden. Auch für die P_k gibt es nun eine Rekursionsformel. Betrachten wir zuerst das Polynom P_4: Es geht darum, alle Produkte aus a und b der Länge 4 zu erfassen, die niemals eine Sequenz aaa aufweisen und am Schluss einen Faktor b haben. Anstatt diese Produkte direkt aufzustellen, bauen wir sie aus den bereits bekannten, vorhergehenden Polynomen auf. P_3 kann nur mit b verlängert werden. P_2 kann nur mit ab verlängert werden, denn eine Verlängerung mit bb führte auf ein Produkt, das wir durch die Verlängerung von P_3 bereits berücksichtigt haben. P_1 kann nur mit a^2b verlängert werden, denn eine Verlängerung mit bab ist schon in der Verlängerung von P_2 berücksichtigt und eine Verlängerung mit abb oder mit bbb ist in der Verlängerung von P_3 berücksichtigt. Alle möglichen Verlängerungen von P_0 sind nun aber bereits berücksichtigt. Damit erhalten wir:
$P_4 = P_3 \cdot b + P_2 \cdot ab + P_1 \cdot a^2b = (a^2b + 2ab^2 + b^3) \cdot b + (ab + b^2) \cdot ab + b \cdot a^2b = 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$. Diese Gesetzmässigkeit kann verallgemeinert werden zu:

$$P_k = P_{k-1} \cdot b + P_{k-2} \cdot ab + P_{k-3} \cdot a^2b$$

Gehen wir gleich vor wie oben, dann müssen wir das Koeffizientenschema aufstellen. Dabei lassen wir aber die Potenzen von a und b weg, weil diese gleich wie im Pascal-Dreieck von links nach rechts in jeder Zeile ab- bzw. aufsteigen.

1
0 1
0 1 1
0 1 2 1
0 0 3 3 1
0 0 2 6 4 1
0 0 1 7 10 5 1

Das Bildungsgesetz lautet in diesem Zahlenschema folgendermassen: Eine Zahl im Schema erhältst du, indem du die Summe bildest aus der links über ihr stehenden Zahl der vorangehenden Zeile und der vertikal darüber stehenden Zahl der vorvorangehenden Zeile und der rechts darüber stehenden Zahl der vorvorvorangehenden Zeile. Die 10 in der untersten Zeile zum Beispiel ist die Summe $6 + 3 + 1$. Liest man dieses Schema nun wieder Zeilenweise von links unten nach rechts oben, entsteht nicht mehr das Pascal-Dreieck, sondern ein neues Schema, dessen Zahlen weniger bekannt sind:

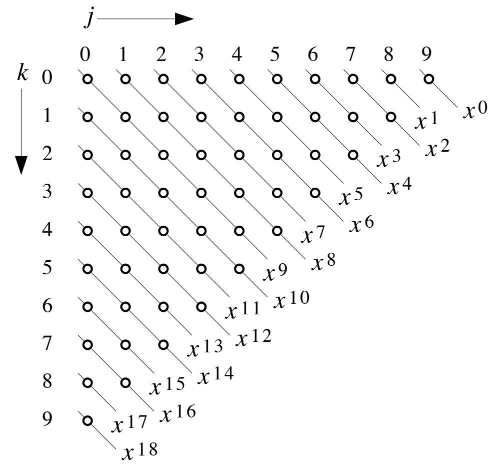
1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1
1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1

Hier werden je **drei** nebeneinander stehende Zahlen addiert und ergeben so die darunter stehende Zahl. Ausserhalb des Schemas muss man sich dabei lauter Nullen vorstellen.

So wie zum Gewinnen der Binomialkoeffizienten der Term $(1+x)^n$ ausmultipliziert wird, kann man hier den Term $(1+x+x^2)^n$ ausmultiplizieren, wenn man nach einer geschlossenen Darstellung der Koeffizienten sucht. Dabei erhält man

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^{n-k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-k-j} \Big) \cdot x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} x^{n+k-j} \; .$$



Um eine geschlossene Darstellung dieser Koeffizienten zu erhalten, muss man in der obigen Doppelsumme den Exponenten $n+k-j$, das heisst also $k-j$ konstant halten, um den Koeffizienten von einer festen Potenz x^m zu erhalten. Wir setzen somit $m = n+k-j$ und berechnen so den Koeffizienten von x^m. Die nebenstehende Figur zeigt für $n = 9$ den Bereich, in dem die Summationsindizes k und j variieren und welche Kombinationen von k und j auf ein bestimmtes m führen: Man muss entlang der eingezeichneten Geraden summieren. Man entnimmt aus der Figur, dass m von 0 bis $2n$ und k für konstantes m von 0 bis $[\frac{m}{2}]$ laufen. Der Summationsindex j ist durch m und k bestimmt: $j = n-m+k$. Damit erhalten wir

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-m+k} \right) x^m = \sum_{m=0}^{2n} p(n,m) x^m$$

Dabei dürfte allerdings k für $m > n$ nicht ab 0 laufen, sondern ab $m-n$, so dass die untere Zahl des zweiten Binomialkoeffizienten nicht negativ wird. Definiert man aber einen Binomialkoeffizienten mit negativer unterer Zahl als Null, müssen wir uns darum nicht kümmern und können k einheitlich ab 0 laufen lassen. Somit haben wir die gesuchte geschlossene Form der Koeffizienten von x^m gefunden:

$$p(n,m) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-m+k} = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \frac{n!}{k!(n-m+k)!(m-2k)!}$$

Eine erste Bemerkung betrifft die rechte Darstellung von $p(n,m)$, welche nur für $m \leq n$ sinnvoll ist: Man erkennt, dass es sich bei den Koeffizienten $p(n,m)$ um eine geeignete Summe von Trinomialkoeffizienten handelt. Eine zweite Bemerkung betrifft die Software Mathematica und ihre Berechnung der Koeffizienten. Geben wir nämlich zuerst unsere Formel explizit ein, so erhalten wir korrekte Ergebnisse:

```
In[1]:= s = Table[Table[Sum[Binomial[n, k] * Binomial[n - k, n - m + k], {k, 0, Floor[m / 2]}], {m, 0, 2 n}], {n, 0, 7}]

Out[1]= {{1}, {1, 1, 1}, {1, 2, 3, 2, 1}, {1, 3, 6, 7, 6, 3, 1}, {1, 4, 10, 16, 19, 16, 10, 4, 1}, {1, 5, 15, 30, 45, 51, 45, 30, 15, 5, 1},
        {1, 6, 21, 50, 90, 126, 141, 126, 90, 50, 21, 6, 1}, {1, 7, 28, 77, 161, 266, 357, 393, 357, 266, 161, 77, 28, 7, 1}}

In[2]:= PaddedForm[MatrixForm[s], 3]

Out[2]//PaddedForm=
                                            {   1}
                                       {   1,   1,   1}
                                  {   1,   2,   3,   2,   1}
                             {   1,   3,   6,   7,   6,   3,   1}
                        {   1,   4,  10,  16,  19,  16,  10,   4,   1}
                   {   1,   5,  15,  30,  45,  51,  45,  30,  15,   5,   1}
              {   1,   6,  21,  50,  90, 126, 141, 126,  90,  50,  21,   6,   1}
         {   1,   7,  28,  77, 161, 266, 357, 393, 357, 266, 161,  77,  28,   7,   1}

In[3]:= p[n_, m_] = Sum[Binomial[n, k] * Binomial[n - k, n - m + k], {k, 0, Floor[m / 2]}]

Out[3]= GegenbauerC[m, -n, 1/2]
```

Geben wir dagegen eine allgemeine Funktionsdefinition `p[n_, m_]` ein, so wandelt Mathematica dies automatisch in sogenannte Gegenbauerkoeffizienten um. Tabellieren wir dann diese Gegenbauerkoeffizienten, stellen wir fest, dass diese für ungerades m negativ werden und dass für $m = n = 0$ die Zahl Null anstatt Eins ausgegeben wird.

```
In[1]:= s = Table[Table[GegenbauerC[m, -n, 1 / 2], {m, 0, 2 n}], {n, 0, 7}]

Out[1]= {{0}, {1, -1, 1}, {1, -2, 3, -2, 1}, {1, -3, 6, -7, 6, -3, 1}, {1, -4, 10, -16, 19, -16, 10, -4, 1},
         {1, -5, 15, -30, 45, -51, 45, -30, 15, -5, 1}, {1, -6, 21, -50, 90, -126, 141, -126, 90, -50, 21, -6, 1},
         {1, -7, 28, -77, 161, -266, 357, -393, 357, -266, 161, -77, 28, -7, 1}}
```

Da scheint ein Programmierfehler vorzuliegen. Um ihn aufzufangen, muss man also unsere Koeffizienten folgendermassen definieren:

```
In[1]:= p[n_, m_] = Sum[Binomial[n, k] * Binomial[n - k, n - m + k] * (-1) ^m, {k, 0, Floor[m / 2]}]; p[0 _, 0 _] = 1

Out[1]= 1

In[2]:= s = Table[Table[p[n, m], {m, 0, 2 n}], {n, 0, 7}]

Out[2]= {{1}, {1, 1, 1}, {1, 2, 3, 2, 1}, {1, 3, 6, 7, 6, 3, 1}, {1, 4, 10, 16, 19, 16, 10, 4, 1}, {1, 5, 15, 30, 45, 51, 45, 30, 15, 5, 1},
         {1, 6, 21, 50, 90, 126, 141, 126, 90, 50, 21, 6, 1}, {1, 7, 28, 77, 161, 266, 357, 393, 357, 266, 161, 77, 28, 7, 1}}
```

Dies liefert offenbar korrekte Ergebnisse.

Nun kehren wir zurück zu unserer ursprünglichen Aufgabe, nämlich der Berechnung des Erwartungswertes der Anzahl Schritte bis zu einem Dreifachsechsers. Dazu müssen wir die Polynome P_k mit Hilfe der nun bekannten Koeffizienten $p(n,m)$ ausdrücken. Das ist nicht ganz trivial, muss man doch im dreieckigen Koeffizientenschema der Zahlen $p(n,m)$ in schrägen Linien nach rechts unten voranschreiten, um die Koeffizienten eines Polynoms P_k mit einem bestimmen Index k zu erwischen.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & P_0 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & P_1 & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & P_2 & & & & \\
 & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & P_3 & & & \\
 & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & P_4 & & \\
1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 & P_5 &
\end{array}
$$

Man erkennt dass bei gegebenem Index k von P_k die Summation über den Index i in der Zeile $[\frac{k+2}{3}]$ startet und in der Zeile k endet. Die letzte Potenz von b muss b^k sein. Daher wird jeder Summand mit $a^{k-i}b^i$ multipliziert. Einzig die Berechnung des zweiten Arguments von $p(n,m)$ ist etwas komplizierter. Man findet, dass bei der Summation das zweite Argument von $p(n,m)$ in Dreierschritten aufsteigt und bei $(-k \bmod 3)$ beginnt. Dies ergibt insgesamt:

$$P_k = \sum_{i=[\frac{k+2}{3}]}^{k} p\Big(i\ ,(-k \bmod 3) + 3(i - [\frac{k+2}{3}])\Big) \cdot a^{k-i} \cdot b^i$$

Schliesslich baut man alles zusammen und erhält:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty}(k+3)a^3 \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+3)a^3 \cdot \sum_{i=[\frac{k+2}{3}]}^{k} p\Big(i\ ,(-k \bmod 3) + 3(i - [\frac{k+2}{3}])\Big) \cdot a^{k-i} \cdot b^i$$

Wir verzichten darauf, in dieser Formel auch noch die Definition der Koeffizienten $p(n,m)$ einzusetzen.

Es bleibt noch die numerische Auswertung dieses Terms. Um einen Speicherüberlauf des Kernels von Mathematica zu verhindern, war ich gezwungen, die Summe in Etappen zu berechnen, und zwar habe ich mich auf die Summation von k von 0 bis 2000 beschränkt. Das Macintosh PowerBook mit 400 MHz Taktfrequenz benötigte dafür etwa 5 Tage Rechenzeit. Im Prinzip lautet also die Eingabe folgendermassen:

```
N[Sum[(k + 3) * a ∧ 3 * Sum[p[i, Mod[(−k), 3] + 3 * (i − Floor[(k + 2)/3])]
    a ∧ (k − i) * b ∧ i, {i, Floor[(k + 2)/3], k}], {k, 0, 2000}]]
```

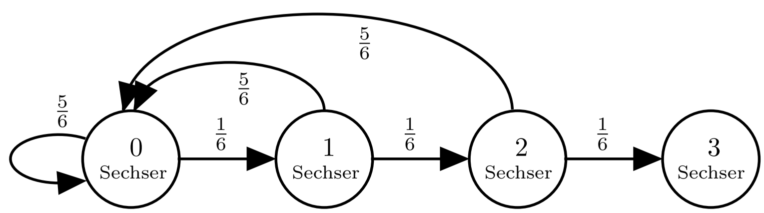
Durch das Aufteilen in Etappen ergaben sich gut verfolgbare Teilsummen

Summation von	0	501	701	1001	1201	1301	1401	1501
bis	500	700	1000	1200	1300	1400	1500	1600
Summanden	151.085	45.1315	36.6948	11.7909	3.68814	2.69379	1.95673	1.41458
Teilsummen	151.085	196.216	232.911	244.702	248.39	251.084	253.041	254.455

Summation von	1601	1701	1801	1851	1901	1951
bis	1700	1800	1850	1900	1950	2000
Summanden	1.01839	0.730474	0.283079	0.239165	0.201921	0.170362
Teilsumme	255.474	256.204	256.487	256.727	256.928	257.099

Sollte der Grenzwert eine ganze Zahl sein, so könnte er 258 betragen.

Wie beim Fall des Doppelsechsers wollen wir zum Schluss den gesuchten Erwartungswert E mit einem **Markow-Prozess** berechnen. In der folgenden Kette sind nun die relevanten Zustände und ihre Übergangswahrscheinlichkeiten festgehalten



Wir setzen wiederum unbekannte Erwartungswerte an: E ist der Erwartungswert der Anzahl Schritte, die benötigt werden, um vom Zustand 0 in den Zustand 3, das Ziel, zu gelangen. Analog definieren wir E_1 als Erwartungswert der Anzahl Schritte vom Zustand 1 ins Ziel. E_2 ist dann die mittlere Schrittzahl vom Zustand 2 ins Ziel. Wie oben gilt:

$$E_2 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot (1 + E) = 1 + \frac{5}{6} \cdot E$$

Man merkt, dass die erste, einleuchtende Formel durchaus übersprungen werden kann, denn jedesmal lassen sich $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$ zu Eins addieren, so dass eine kürzere Regel formuliert werden kann:

Der Erwartungswert der Anzahl Schritte von einem beliebigen Zustand ins Ziel ist immer die Summe von Eins plus das mit den Übergangswahrscheinlichkeiten zu den Nachfolgezuständen gewichtete Mittel der Erwartungswerte der Anzahl Schritte von allen Nachfolgezuständen aus bis in Ziel.

Das heisst natürlich für die obige Formel, dass eigentlich $1 + \frac{5}{6} \cdot E + \frac{1}{6} \cdot 0$ geschrieben werden müsste, weil ja Null der Erwartungswert der Anzahl Schritte vom Zustand 3 bis ins Ziel ist. Als nächstes stellen wir gemäss dieser Regel eine Gleichung für E_1 auf:

$$E_1 = 1 + \frac{5}{6} \cdot E + \frac{1}{6} \cdot E_2$$

In dieser Gleichung setzen wir E_2 von oben ein und erhalten wie schon im Fall des Doppelsechsers:

$$E_1 = 1 + \frac{5}{6} \cdot E + \frac{1}{6} \cdot (1 + \frac{5}{6} \cdot E) = \frac{7}{6} + \frac{35}{36}E$$

Zum Schluss stellen wir die Gleichung für E selbst auf

$$E = 1 + \frac{5}{6} \cdot E + \frac{1}{6} \cdot E_1 \ ,$$

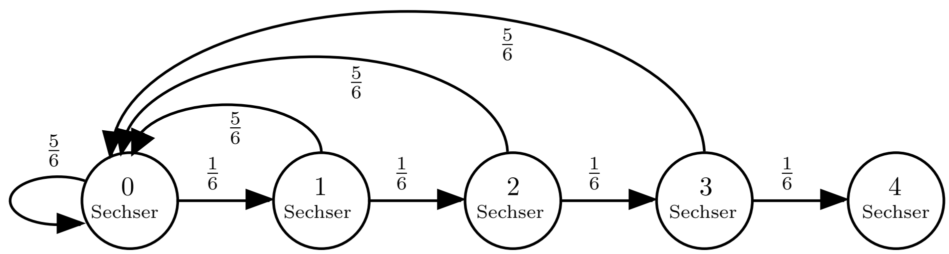
wo wir E_1 einsetzen und

$$E = 1 + \frac{5}{6} \cdot E + \frac{1}{6} \cdot (\frac{7}{6} + \frac{35}{36}E) = \frac{43}{36} + \frac{215}{216}E$$

erhalten. Diese Gleichung kann nach E aufgelöst werden und ergibt tatsächlich $E = 258$.

3. Verallgemeinerung

Damit ist wohl eindrücklich gezeigt, dass der Einsatz von Markow-Prozessen eine grosse Erleichterung bringt, ganz abgesehen davon, dass wir ja die unendlichen Reihen zur Berechnung von E nicht geschlossen aufsummieren und das numerische Resultat nicht exakt angeben konnten. Die Verallgemeinerung auf mehr als drei Sechser dürfte mit der Baummethode ganz erheblichen Aufwand mit sich bringen, während sie mit einem Markow-Prozess auf der Hand liegt. Als Beispiel sei hier noch berechnet, wie oft man im Mittel einen Würfel werfen muss, bis viermal hintereinander eine Sechs erscheint.



Wir definieren analog zum vorhergehenden Fall den Erwartungswert $E_{i,4}$ als die mittlere Schrittzahl, die vom Zustand „i Sechser“ bis ins Ziel, den Zustand „4 Sechser“, benötigt werden. Der nachgestelle Index 4 soll an den Fall $N = 4$ (vier Sechser hintereinander) erinnern. Gesucht ist also der Erwartungswert $E_{0,4}$. Nach der oben genannten Regel für Markow-Prozesse können wir die folgenden Gleichungen aufstellen.

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} E_{3,4} & = & 1 & + & \frac{5}{6}E_{0,4} & & \\ E_{2,4} & = & 1 & + & \frac{5}{6}E_{0,4} & + & \frac{1}{6}E_{3,4} \\ E_{1,4} & = & 1 & + & \frac{5}{6}E_{0,4} & + & \frac{1}{6}E_{2,4} \\ E_{0,4} & = & 1 & + & \frac{5}{6}E_{0,4} & + & \frac{1}{6}E_{1,4} \end{array}\right\}$$

Setzt man in der letzten Gleichung alle vorangehenden ein, erhält man:

$$E_{0,4} = 1 + \frac{5}{6}E_{0,4} + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6}E_{0,4} + \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{5}{6}E_{0,4} + \frac{1}{6}(1 + \frac{5}{6}E_{0,4})\Big)\right) = \sum_{i=0}^{3}(\frac{1}{6})^i + \frac{5}{6}E_{0,4}\sum_{i=0}^{3}(\frac{1}{6})^i$$

Dies ergibt verallgemeinert auf N gewünschte Sechser hintereinander:

$$E_{0,N} = \Big(1 + \frac{5}{6}E_{0,N}\Big)\sum_{i=0}^{N-1}(\frac{1}{6})^i = \Big(1 + \frac{5}{6}E_{0,N}\Big)\cdot\frac{1-(\frac{1}{6})^N}{1-\frac{1}{6}} = \Big(\frac{6}{5} + E_{0,N}\Big)\Big(1 - (\frac{1}{6})^N\Big)$$

Das ist eine Gleichung 1. Grades in $E_{0,N}$, welche die explizite Formel

$$E_{0,N} = \frac{\frac{6}{5}\Big(1-(\frac{1}{6})^N\Big)}{(\frac{1}{6})^N} = \frac{6}{5}(6^N - 1) = \frac{1}{5}6^{N+1} - \frac{6}{5}$$

liefert. Dies lässt nun die rekursive Beziehung

$$E_{0,N-1} + 1 = \frac{1}{5}6^N - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}E_{0,N}$$

ablesen, was auf die übersichtliche Rekursionsformel

$$E_{0,N} = 6\cdot(E_{0,N-1} + 1)$$

führt.

Es gilt nun also

$$\begin{array}{lcccc} E_{0,1} & = & 6 & & \\ E_{0,2} & = & 6\cdot 7 & = & 42 \\ E_{0,3} & = & 6\cdot 43 & = & 258 \\ E_{0,4} & = & 6\cdot 259 & = & 1554 \\ E_{0,5} & = & 6\cdot 1555 & = & 9330 \end{array}$$

und so weiter.

4. Ein kümmerlicher Spezialfall

Erweisen wir nun der Baummethode zum Abschluss noch die Ehre, wenigstens für den Fall $N = 1$ das beinahe triviale Resultat $E_{0,1} = 6$ exakt liefern zu können. Nach unserer allerersten Methode erhalten wir die folgende unendliche Reihe als Erwartungswert

$$E_{0,1} = 1 \cdot a + 2 \cdot ba + 3 \cdot bba + 4 \cdot bbba + \ldots$$

Die homogenen Polynome bestehen hier nur aus Potenzen von b. Wir schreiben also

$$E_{0,1} = a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot b^k \ .$$

So erhalten wir

$$E_{0,1} = a\Big[\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot b^k + \sum_{k=0}^{\infty} b^k\Big] = a\Big[b \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot b^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b^k\Big] = a\Big[b \cdot \frac{\partial}{\partial b}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b^k\Big) + \sum_{k=0}^{\infty} b^k\Big]$$

Mit diesem Ableitungstrick lässt sich also die Summe berechnen:

$$E_{0,1} = a\Big[b \cdot \frac{\partial}{\partial b}\Big(\frac{1}{1-b}\Big) + \frac{1}{1-b}\Big] = a\Big[b \cdot \frac{1}{(1-b)^2} + \frac{1}{1-b}\Big] = a \cdot \frac{b + (1-b)}{(1-b)^2} = \frac{a}{(1-b)^2}$$

Bedenkt man, dass $a = 1 - b$ und $a = \frac{1}{6}$, ergibt sich das einfache Resultat

$$E_{0,1} = \frac{1}{a} = 6$$

Diesen Spezialfall möchte man natürlich noch als Spezialfall einer mit a und b ausgedrückten allgemeinen Formel sehen. Kehren wir also zu unserer Formel

$$E_{0,N} = \Big(1 + \frac{5}{6}E_{0,N}\Big) \sum_{i=0}^{N-1} (\frac{1}{6})^i = \Big(1 + \frac{5}{6}E_{0,N}\Big) \cdot \frac{1 - (\frac{1}{6})^N}{1 - \frac{1}{6}} = \Big(\frac{6}{5} + E_{0,N}\Big)\Big(1 - (\frac{1}{6})^N\Big)$$

zurück und verallgemeinern sie unter Berücksichtigung von $1 - a = b$ in naheliegender Weise auf

$$E_{0,N} = \Big(1 + b \cdot E_{0,N}\Big) \sum_{i=0}^{N-1} a^i = \Big(1 + b \cdot E_{0,N}\Big) \cdot \frac{1 - a^N}{1 - a} = \Big(\frac{1}{b} + E_{0,N}\Big)\Big(1 - a^N\Big)$$

Daraus ergibt sich analog zu oben

$$E_{0,N} = \frac{\frac{1}{b} \cdot (1 - a^N)}{a^N} = \frac{1 - a^N}{(1-a) \cdot a^N} = \sum_{i=0}^{N-1} a^{i-N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{1}{a^N} \ ,$$

was doch eine erstaunlich schöne Beziehung ist.