

Kernideen als Brücke zwischen Erfahrung und Fachwissen

Peter Gallin

Aus dem Vergleich der gängigen Unterrichtspraxis in den Schulfächern Deutsch und Mathematik ist das Konzept „dialogisches Lernen“¹ am Schweizer Gymnasium „Kantonsschule Zürcher Oberland“ entwickelt worden. Beide Fächer leiden unter zum Teil diametral gegensätzlichen Defiziten, die das Lernen behindern können. Das Hauptproblem im Fach Mathematik ist die Gefahr, dass oft zu schnell gewisse Rezepte (Algorithmen) zur Lösung bestimmter Aufgaben ins Zentrum gestellt und gar nicht die Probleme selbst studiert werden, die mit mathematischen Instrumenten und Vorgehensweisen angegangen werden können. Die Folge dieser vorschnellen „Regularisierung“ im Mathematikunterricht ist in vielen Fällen die so genannte „Mathematikschädigung“ der Lernenden, die sich auf verschiedene Arten äußern kann: Die einen resignieren und sagen, sie seien zu dumm für Mathematik, die andern meinen, Mathematik bestehe aus einer Sammlung von Aufgaben, die jeweils mit genau einer Methode möglichst rasch gelöst werden müssen. Beide verlieren auf die Dauer ihr Selbstwertgefühl und entwickeln eine ungesunde Abhängigkeit von Autoritäten (Lehrbüchern, Lehrpersonen, Experten), ohne je erfahren zu haben, dass sie im Fach Mathematik selbst etwas bewirken und leisten könnten. Die Stärkung des Selbstwertgefühls ist also eine zentrale Herausforderung, der sich der moderne Mathematikunterricht stellen muss.

Das dialogische Prinzip

Das dialogische Lernen setzt hier an und versucht, durch einen etwas ungewöhnlichen Start in ein Stoffgebiet einzusteigen. Anstatt nach einer Motivationsphase gleich mit der schrittweisen Wissensvermittlung nach dem Prinzip „vom Einfachen zum Schwierigen“ zu beginnen, soll in einer so genannten „Kernidee“ die ganze Komplexität und Attraktivität des neuen Stoffgebiets gebündelt werden. Anschließend müssen die Lernenden genügend Zeit erhalten, sich individuell mit einem zugehörigen „Auftrag“ zu befassen, um so die Probleme selbst zu erfahren, die sich im neuen Stoffgebiet stellen. Da von einem Unterricht mit ganzen Klassen von zwanzig bis dreißig Schülerinnen und Schülern ausgegangen wird, müssen alle Lernenden die Pfade ihrer Erkundungen schriftlich im so genannten „Lernjournal“ festhalten. Dabei ist auch die Zusammenarbeit der Lernenden unter sich erlaubt, ja sogar empfohlen. Auch weitere Informationsquellen wie Verwandte, Bekannte, Bücher und Internet können und sollen genutzt werden, müssen aber als Quellenangabe im individuell geführten Journal dokumentiert sein. Schließlich ist entscheidend, dass die Lehrperson alle Journale sichtet und ihr – meist knappes – Urteil über die Intensität der Arbeit fällt. Sie sucht dabei vorwiegend das Gelungene, die Perlen, und spielt sie als „Rückmeldung“ wieder in die Klasse ein. Das sind in aller Regel die neuen Kernideen, nach denen der Unterricht seine Fortsetzung findet. Damit schließt sich der Kreislauf des dialogischen Lernens (Abbildung 1).²

¹ Urs Ruf und Peter Gallin: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Kallmeyer Verlag 2003

² Für weitere Details des dialogischen Lernens siehe z.B. „Praxis der Mathematik“, Heft 7, Februar 2005

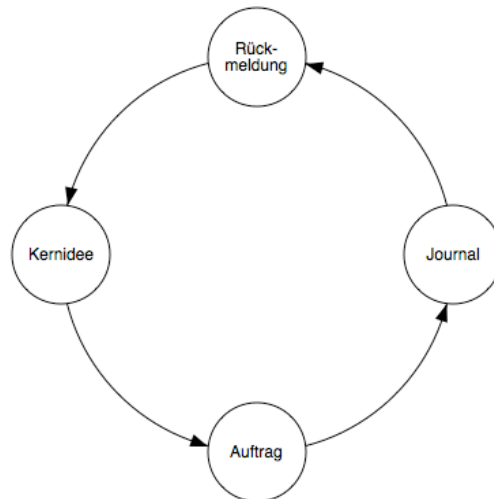


Abbildung 1: Kreislauf des dialogischen Lernens

Kernidee und Auftrag zur Achsenspiegelung und Symmetrie

Hier wollen wir uns auf „Kernidee“ und „Auftrag“ eines einzigen Stoffgebiets des 7. Schuljahrs konzentrieren: Achsenspiegelung und Achsensymmetrie. Normalerweise wird im Geometrieunterricht eine Achsenspiegelung mittels einer Geraden eingeführt, an der beliebige Punkte der Zeichenebene gespiegelt werden. Dies geschieht durch Fällen eines Lotes vom zu spiegelnden Punkt zur Geraden und anschließendem Verdoppeln der entstandenen Lotstrecke. Danach können beliebige Punktmengen (Figuren) an einer Geraden gespiegelt werden, ja es können sogar mehrere Spiegelungen an verschiedenen Geraden nacheinander ausgeführt und studiert werden. Schließlich definiert man eine Figur als achsensymmetrisch, falls sie bei der Spiegelung an einer bestimmten Geraden, der Symmetrieachse, in sich selbst übergeführt wird. In diesem Zusammenhang können viele Kunstwerke und auch die Grossbuchstaben unseres Alphabets auf Achsensymmetrie hin untersucht werden. Beinahe scheint das Vorgehen in diesem Stoffgebiet zwingend vorgegeben zu sein. Von der Sachlogik her gedacht, lässt sich also die Achsensymmetrie erst aufgrund der Achsenspiegelung erklären.

Ein Einstieg mit einer Kernidee kann aber anders aussehen, weil hier einerseits das Vorwissen und die Erfahrung der Kinder und andererseits eine Provokation oder Herausforderung wichtiger sind als die nüchterne Sachlogik. Wenn der Titel des neuen Geometriekapitels schon das Wort „Spiegelung“ in sich trägt, dann ist es fast zwingend, dass zuerst mit einem realen Spiegel hantiert wird. Damit rutscht man unfreiwillig in die Dreidimensionalität hinein, was manche Lehrperson abschrecken könnte. Wer vermeiden will, dass eine dreidimensionale Spiegelung an einer Ebene ins Spiel kommt, kann auf Erfahrungen aufbauen, die bereits beim Spielen mit einem Spiegel gemacht worden sind, sobald man einen rechteckigen und randlosen Spiegel auf eine bedruckte Fläche stellt. Automatisch möchte man dann bewirken, dass die im Spiegel beobachtbare Fläche wirklich knickfrei die diesseits des Spiegels liegende originale Fläche fortsetzt. Dadurch wird der Spiegel von selbst senkrecht zur Fläche gehalten und es wird letztlich nur eine Geradenspiegelung in der Ebene studiert, nämlich die Spiegelung an der Kante des Spiegels, mit der er die Fläche berührt.

Wie ich von meiner Mutter und meiner Tante erfahren habe, die beide viel mit Stickereien zu tun hatten, bedient man sich dieser Technik, um ein gesticktes Bandornament in einem rechten Winkel fortzusetzen. Dazu setzt man einfach die Kante des Spiegels auf das Ornament und zwar mit 45 Grad gegenüber der Laufrichtung des Ornaments verdreht; dann kann man im Spiegel die mit 90 Grad abgewinkelte Fortsetzung des Ornaments studieren, sich aufzeichnen und schließlich nach dieser Vorlage sticken. Diese Geschichte aus meiner Biographie – meine Kernidee zur Geradenspiegelung – habe ich im Januar 2003 in einer 7. Klasse erzählt und dann noch dazugefügt, dass unser Gesicht in den seltensten Fällen achsensymmetrisch sei, was mit der gleichen Technik anhand einer Fotografie überprüft werden könne. Mehr Wissensvermittlung war nicht nötig, um den Lernenden den folgenden Auftrag zur Bearbeitung als Hausaufgabe zu überlassen.

Auftrag: Halte einen Spiegel auf das hier eingeklebte Foto deines Gesichtes und überprüfe, ob dein Gesicht achsensymmetrisch ist oder nicht. Erfinde dann eine Methode, wie du mit dem Fotokopierer aus deinem Foto zwei Gesichter herstellen kannst, von denen eines aus zwei linken und eines aus zwei rechten Hälften besteht.

Das Autograph von Stefanie

Das dialogische Lernen bekommt seinen Reiz erst durch die konkreten Arbeiten der Schülerinnen und Schüler im Journal. So ist es unumgänglich auch hier wenigstens einen Beitrag zum gestellten Auftrag im Original zu studieren. Im abgedruckten Autograph (Abbildung 2) erkennen wir, dass Stefanie den Auftrag in zweifacher Hinsicht leicht abwandelte. Erstens geht sie gar nicht auf den Fotokopierer ein und zweitens treibt sie noch etwas Schabernack mit einem Foto einer Freundin. Beides ist Beleg für eine beachtliche Ichstärke. Stefanie muss aber nicht irgendwelche Sanktionen befürchten, sondern weiß, dass solche individuellen Abwandlungen eines Auftrags durchaus positiv in die Beurteilung der Intensität eingehen. Sie hat denn auch für ihre originelle Arbeit das Prädikat „Wurf“ (drei Häklein) erhalten.

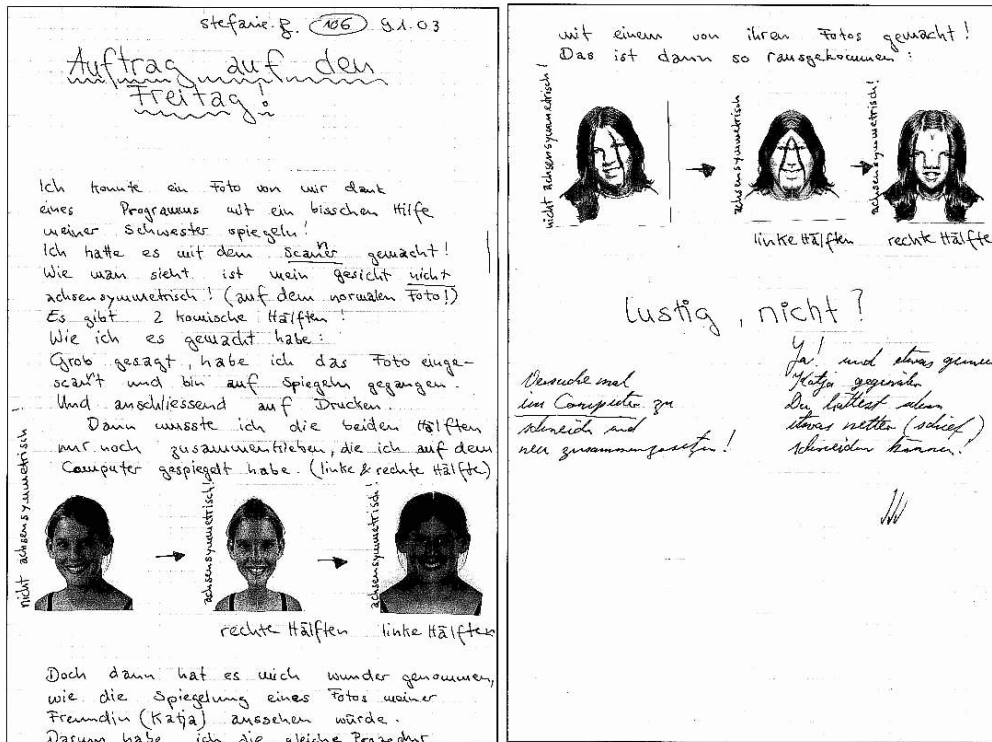


Abbildung 2: Autograph von Stefanie

Wenn die ganze Klasse sich in ähnlicher Weise mit dem Phänomen „Spiegelung“ auseinandergesetzt und das Beispiel von Stefanie als Autograph erhalten hat, lässt sich die geometrisch-abstrakte Konstruktion des gespiegelten Punktes als Theorie leichter nachschieben, als wenn zuvor keine Erfahrung mit dem Phänomen hätte gemacht werden können. Im dialogischen Lernen gilt eben der Leitsatz: „Die Theorie kommt hinterher.“

Eine biographische Kernidee

Im weiteren Verlauf der Arbeit mit Spiegelungen treten in den Lehrbüchern häufig Aufgaben auf, bei denen beispielsweise eine Billardkugel zuerst gegen eine Bande des Tisches gestoßen und dann zur Kollision mit einer anderen Kugel gebracht werden soll. Der gleiche Aufgabentyp wird auch mit Lichtstrahlen eingekleidet, die von einem gegebenen Ausgangspunkt über einen gegebenen Spiegel zu einem gegebenen Zielpunkt gelangen sollen. Dann stellt sich die Frage, in welche Richtung die Billardkugel oder der Lichtstrahl losgeschickt werden muss. Dabei wird das physikalische Reflexionsgesetz benützt, dass der Einfallswinkel bei der Bande oder beim Spiegel gleich dem Ausfallswinkel sein muss. Ein möglicher Weg, der von der Fachlogik nahe gelegt wird, wäre, sich möglichst viele Wege aufzuzeichnen, die alle beim gegebenen Startpunkt beginnen und dann an der Bande oder am Spiegel reflektiert werden. Studiert man alle ausfallenden Wege nach der Banden- oder Spiegelberührung, wird eine Konstruktionsmethode für den gesuchten Weg bald sichtbar.

Ein anderer Zugang könnte durchaus wieder mit einer Kernidee geschaffen werden, die in folgender Geschichte steckt: Als Gymnasiast fuhr ich einmal nachts im schwach besetzten Zug. Ich sass am Fenster in einem Viererabteil, das von den benachbarten Viererabteilen durch recht hohe Kopfstützen so abgetrennt war, dass man im Sitzen nicht in sie hinüber sehen konnte. Allerdings waren diese als Brett gestalteten Kopfstützen nicht ganz so breit

wie die Rücklehnen der Sitzbänke selbst, so dass ein Spalt zwischen der Wagonwand und der Kopfstütze frei blieb. So konnte es geschehen, dass im nächsten Abteil einmal eine junge Frau saß, die ich ganz gerne einmal angeschaut hätte. Mich zu erheben, hätte ich mich in meiner Schüchternheit nicht gewagt, aber zufälligerweise saß sie in jenem Abteil mir zugewandt in der Weise, dass ich sie wegen der Dunkelheit draußen als Spiegelung im Fenster meines Abteils dank des besagten Spaltes erblicken konnte. Sofort fragte ich mich natürlich, ob, wenn ich sie sehen kann, auch sie mich sehen kann. Das Resultat meiner Überlegung ernüchterte mich und ich wagte nicht mehr länger, das Spiegelbild zu fixieren. Trotzdem war mir dann schnell klar, dass man sich dank der Spiegelung im Fenster einen kompletten Nachbarwagon draußen in der Nacht vorstellen kann, der konsequent parallel zum realen Wagon alle Bewegungen mitsamt seinen Insassen getreulich mitmacht. Die junge Frau erschien also in diesem Nachbarwagon gleichsam als Doppelgängerin ihrer selbst und damit war auch klar, in welche Richtung ich meinen Blick lenken musste, um sie über das Fenster im Nachbarabteil zu erblicken.

Die Kernidee des „Doppelgängers“ legt eine Konstruktionsmöglichkeit des eingangs gestellten Problems des Billardtischs oder des Lichtstrahls nahe, die durchaus von den Lernenden selbst erkundet werden kann. Selbstverständlich werden sie auch ermuntert, schwierigere Aufgaben zu diesem Themenkreis zu erfinden, wie zum Beispiel ein Billardproblem, bei dem die angestoßene Kugel erst nach zwei Bandenberührungen auf die Zielkugel trifft. Solche Aufgaben zählen zu den schwierigsten im Themenkreis der Spiegelungen und es lohnt sich, sie mit einer einzigen Kernidee in verschiedenen Varianten durchzuspielen.

Arbeiten mit der Kernidee

Eine weitere Aufgabe zum Spiegel, die sogar im Alltag manchmal ansteht und immer noch mit einer zweidimensionalen Spiegelkonstruktion gelöst werden kann, ist die folgende: Wie groß muss ein Spiegel sein und wie muss er an einer vertikalen Wand montiert sein, damit man sich ganz darin sehen kann? Die Kernidee des Doppelgängers hilft auch hier weiter. Vielleicht kann aber ein weiteres reales Experiment neue Energien und Kernideen der Lernenden wecken. Ein möglicher Auftrag lautet dann so:

Dusche heiss! So heiss und so lange, dass sich der Spiegel in deinem Badezimmer mit Wasser beschlägt und matt wird. Stell dich dann vor den Spiegel und fahre mit dem Finger den noch schwach erkennbaren Konturen deines Kopfes nach. Beschreibe, welche Gestalt die mit dem Finger gezeichnete Kurve hat und versuche sie zu erklären.

Vielleicht entsteht durch dieses Experiment die Kernidee eines „Schrumpfkopfes“ von selbst, so wie sie sich bei mir eingestellt hat. Jedenfalls sollten diese Erfahrungen es durchaus möglich machen, die Aufgabe mit der Größe des Spiegels zu bearbeiten oder gar vollständig zu lösen. Man studiere dazu das Autograph von Nadja (Abbildung 3).

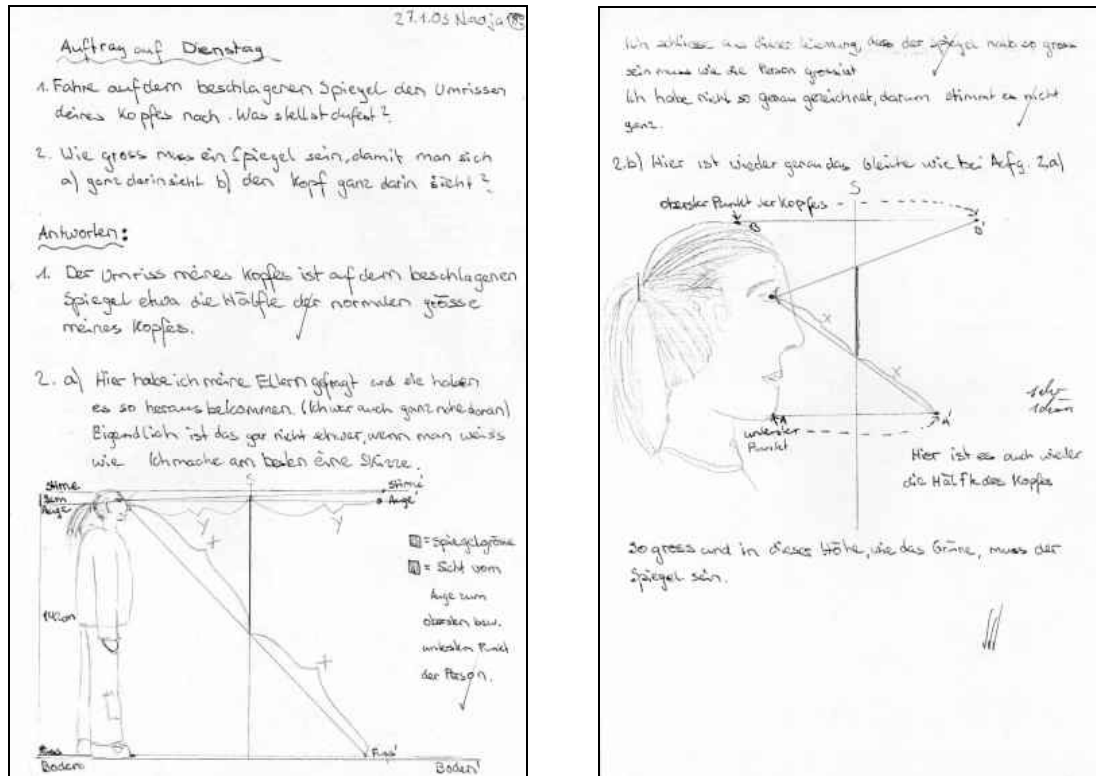


Abbildung 3: Autograph von Nadja

Interessant wird das Studium der realen Spiegelungen räumlicher Gegenstände besonders dann, wenn mehrere solcher Spiegelungen an verschiedenen Spiegeln nacheinander ausgeführt werden. Das war ja bereits beim Billardproblem ein Thema, sobald die Kugel mehrmals an die Bande treffen soll, bevor sie ihr Ziel erreicht. Das folgende Experiment könnte einen Zugang verschaffen, der ganz im alltäglichen Erfahrungsbereich der Lernenden liegt: Hat man das Glück, dass im Badezimmer oder irgendwo sonst zwei Spiegel oder zwei spiegelnde Flächen in einen rechten Winkel zueinander gebracht werden können, stellt man verwundert fest, dass man einen eigenen Doppelgänger nicht nur in den beiden Spiegeln einzeln erkennen kann, sondern dass ein dritter Doppelgänger im Bereich der Kante erscheint, wo die beiden Spiegel zusammentreffen. Auch wenn der Betrachter sich leicht hin und her bewegt, macht dieser dritte Doppelgänger die Bewegungen in der Weise mit, dass er für den Betrachter stets durch die Verbindungskante der beiden Spiegel halbiert erscheint. Bei genauerem Hinsehen merkt man, dass der dritte Doppelgänger mit dem rechten Auge zwinkert, wenn man selbst auch mit dem rechten Auge zwinkert, während die beiden anderen Doppelgänger ihr linkes Auge bewegen. Ich sehe also im dritten Doppelgänger meine Gestalt so, wie die anderen Leute mich sehen. Eine morgendliche zuverlässige Spiegelkontrolle müsste also stets mit zwei senkrecht zueinander stehenden Spiegeln und nicht nur mit einem Spiegel durchgeführt werden.

Spiegelungen im Raum

Ergänzen wir die zwei senkrechten Spiegel durch einen dritten Spiegel, der seinerseits senkrecht zu den beiden anderen Spiegeln steht – wir stellen uns am besten zwei ganz verspiegelte Zimmerwände bei einer ebenfalls spiegelnden Zimmerdecke vor –, so wird jeder Lichtstrahl, der in diese Zimmerecke ausgesandt wird, an den drei Spiegeln so umgelenkt, dass er genau parallel zu seiner Einfallsrichtung zurückgeworfen wird. Daher

sind in einem so genannten „Katzenauge“, das hinten am Fahrrad montiert wird, lauter solche spiegelnden Zimmerecken eingebaut, damit das Licht in jene Richtung zurückgeworfen wird, aus der es eingefallen ist. Auch wenn der Beweis dieser Tatsache im dreidimensionalen Fall vielleicht nicht mehr thematisiert werden kann, lohnt sich das Experimentieren mit realen Spiegeln. Das hat Christian Morgenstern vermutlich auch gemacht, bevor er den Einfall zu seinem „Lied vom blonden Korke“ hatte (Abbildung 4).

Das Lied vom blonden Korke

Ein blonder Korke spiegelt sich
in einem Lacktablett –
allein er sah sich dennoch nich,
selbst wenn er Augen hätt!

Das macht, dieweil er senkrecht steigt
zu seinem Spiegelbild!
Wenn man ihn freilich seitwärts neigt,
zerfällt, was oben gilt.

O Mensch, gesetzt, du spiegelst dich
im, sagen wir, im All!
Und senkrecht! – wärest du dann nich
ganz in demselben Fall?

Wer dieses Lied nicht sogleich begreift, der nehme einen Kork,
versehe ihn unten mit etwas erweichtem Bienenwachs und
drücke ihn gegen den nächstbesten Wandspiegel, so dass er auf
dessen Fläche kleben bleibt. Hierauf rücke er sich einen Sessel
davor, setze sich davor und "fühle" sich nun in die Sache "ein".

Abbildung 4: Gedicht mit Kommentar von Christian Morgenstern, 1905

Im Gedicht steckt in der Tat eine Kernidee für die Grundkonstruktion der Spiegelung an einer Ebene, die ganz ähnlich wie im zweidimensionalen Fall ausgeführt wird: Fällt ein Lot vom zu spiegelnden Punkt gegen die Spiegelebene und verdopple diese Lotstrecke hinter die Spiegelebene. Diesen einfachen Sachverhalt greift Morgenstern raffiniert auf und trifft im Kommentar einen ganz wesentlichen Punkt des Lernens von Mathematik: „Man fühle sich in die Sache ein!“

Diese schlichte, leicht ironisch gemeinte Bemerkung Morgensterns ruft uns in Erinnerung, worum es in der Schule gehen sollte. Die Lernenden sollen über verbindliche Aufträge zum Sammeln von Erfahrungen angehalten werden, die in ihnen eigene Kernideen zu einem Thema entstehen lassen. Nur so kann das Fachwissen dauerhaft mit der Person des Lernenden verbunden werden. Die individuellen Kernideen stiften einerseits einen Sinn im Hier und Jetzt und erlauben andererseits eine Rekonstruktion des Fachwissens, wenn die Einzelheiten bereits vergessen sind.