

Der Umgang mit Längenmassen setzt Kenntnisse über den Zahlbegriff voraus. Ein Überblick zeigt, welche Bausteine die Kinder für die Entwicklung mathematischer Techniken benötigen.

Peter Gallin

Vom Zahlbegriff zum Längenmass

Verständnis und Interesse für Zahlen entwickeln Kinder in unserem Kulturkreis bereits in den ersten Lebensjahren. Im Alter von vier Jahren sind – auch bei grossen individuellen Unterschieden – wesentliche Schritte bereits gemacht. Trotzdem sollten Lehrpersonen die Bausteine kennen, aus denen sich der Zahlbegriff zusammensetzt, damit sie im Unterricht die verfeinerten mathematischen Techniken – insbesondere auch den Umgang mit den Längenmassen – bruchlos als Fortsetzung der natürlichen Entwicklung einführen können. Ein zentraler Gedanke vorweg: Um eine persönliche Beziehung zu den Längenmassen aufbauen zu können, muss man sich immer wieder vorstellen, wie eine Strecke aus kleineren Einheiten in einem zeitlich-rhythmischen Prozess aufgebaut wird. So gleicht dieser Prozess demjenigen zum Aufbau des Zahlbegriffs.

Kardinal- und Ordinalzahlen

Die grösste Einteilung der natürlichen Zahlen (0), 1, 2, 3, 4, usw. macht die Unterscheidung zwischen Kardinal- und Ordinalzahl. Mit der Kardinalzahl 7 werden alle Mengen mit sieben Elementen charakterisiert. Man sagt auch, dass die Kardinalzahl die Mächtigkeit der Menge angibt. Mit der Ordinalzahl 7 wird die Stellung eines Objekts innerhalb einer geordneten Reihe der Objekte festgestellt: Das Objekt steht an Stelle der Nummer 7. Die Verbindung beider Zahlbegriffe findet statt, sobald einem Kind klar wird, dass aus der siebten Stellung des Objekts folgt, dass die Menge aller Objekte vor dem betrachteten inklusive das betrachtete selbst die Mächtigkeit 7 aufweist. Schon rein durch diese Unterscheidung zweier Zahlbegriffe wird deutlich, dass der Ordinalzahlbegriff elementarer ist als der Kardinalzahlbegriff. Der Zahlbegriff ist aber stets auf beide Aspekte abgestützt und kann erst als erworben gelten, wenn beide Aspekte zu einer untrennbaren Einheit verschmolzen sind. (Hess 2002, S. 89ff.)

Die Entstehung des Ordinalzahlbegriffs

Tatsächlich verläuft die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind in der Regel von der Ordinalzahl zur Kardinalzahl. Der Ordinalzahlbegriff selbst wird manchmal noch weiter unterteilt in Zählzahlbegriff und Ordnungszahlbegriff. Wir befassen uns hier vor allem mit dem Zählzahlbegriff. Das Kind lernt zuerst zählen. Dabei muss es drei Aspekte unter einen Hut bringen. Es begegnet zum einen den Ziffern als geometrischen Gestalten. Auf der anderen Seite lernt es,

die akustische Zahlreihe nach und nach aufzusagen. Schliesslich muss es erkennen, dass jede geometrische Gestalt einem aufgesagten Wort als Namen entspricht. In welcher Reihenfolge diese drei Aufgaben bewältigt werden, ist unerheblich und variiert von Kind zu Kind. Die einen lernen zuerst die Ziffern als Objekte mit Namen kennen, die anderen werden zuerst nur akustisch mit der Aufzählung «Eins, zwei, drei, vier, ...» vertraut. Durch das Aufzählen werden die Ziffernobjekte in eine Reihe gebracht, die auch mit konkreten Ziffern ausgelegt werden kann. Es ist in keiner Weise selbstverständlich, dass das Kind bei vorliegender Ziffernreihe mit dem Finger den Objekten in synchroner Weise folgt, wenn es diese aufsagt. Diese eindeutige Zuordnung von ausgesprochenem Wort und gezeigtem Objekt muss ihrerseits erst gelernt werden.



Standbilder aus Video: Peter Gallin

Valeria legt mit zwei Jahren und acht Monaten ihre roten oder gelben Ziffern auf die von mir gelegten grünen oder blauen Ziffern. Wenig später legt sie ihre Ziffern an die richtige Stelle und als Bestätigung lege ich meine darauf. Schliesslich spricht sie die Namen der Ziffern aus und zeigt mit dem Finger (meistens, aber nicht immer!) synchron auf die zugehörige Ziffer.

Auf diese Weise bildet sich der Ordinalzahlbegriff, der sich zunehmend festigt, so dass die Stellung einer Zahl in ihrer lokalen Umgebung als mentales Vorstellungsbild vertraut wird. Jetzt muss nicht mehr die ganze Zahlreihe von vorne aufgesagt werden, wenn die Nachbarn einer Zahl genannt werden sollen.

Eine Brücke von der Zeit zum Raum

Eine Schlüsselstellung beim Erwerb des Zählzahlbegriffs nimmt das rhythmische Zählen ein. Das Wiederkehrende, das Repetitive, das Rituelle steht am Anfang des Zahlbegriffs. Es gibt Kinder, die anfangs irgendwelche Zahlwörter aufsagen, ohne auf deren wirkliche und lückenlose Reihenfolge zu achten: «Eins, zwei, drei, acht, sechs, ...». Wichtig ist also nur die regelmässige zeitliche Abfolge. Man könnte sagen: Am Anfang des Zahlbegriffs, insbesondere des Ordinalzahlbegriffs, steht die Litanei, die rhythmische Musik. Die Ordinalzahl begründet sich primär in der Zeit und sekundär im Raum, der erst später bei der Bildung der Kardinalzahl wichtig wird. Diese Unterscheidung ist bei der Beschäftigung mit Längenmassen wichtig. Das Hauptproblem der – natürlich räumlichen – Längenmasse wird sein, ihnen wieder einen zeitlichen Charakter zurückzugeben.

Durch die rhythmische Bewegung des abzählenden Fingers, beispielsweise von links nach rechts, wird die Brücke von der Zeit zum vorerst eindimensionalen Raum geschlagen. Damit wird die Zeit zum ersten Mal räumlich dargestellt. Das geschieht auch beim Schreiten, wenn dazu die Schritte gezählt werden. Zur didaktischen Unterstützung dieses wichtigen Übergangs von der Zeit zum Raum eignen sich der traditionelle Doppelmeter oder das flexible Band des Schneidermeters besonders gut.



Doppelmeter und Schneidermeter helfen, den Übergang von der Zeit zum Raum begreifbar zu machen.

Ohne zunächst auf den Begriff des Längenmasses einzugehen, kann das Kind mit diesen realen Zahlenreihen das rhythmische Zählen und gleichzeitige Bewegen des Fingers koordinieren und wird dabei kaum gegen oben hin eingeschränkt. Es eröffnet sich die Welt der Unendlichkeit, und gleichzeitig wird die Neugier auf die neuen Namen und Schreibweisen geweckt.



Valeria ist vier Jahre und zwei Monate alt: Mit monotoner Stimme und konsequent folgendem Finger zählt sie streng rhythmisch auf dem Doppelmeter bis etwa 39. Dort fängt das Unbekannte an, das jedoch durch kleine Hinweise auf «Vierzig, einundvierzig, zweiundvierzig, ...» schnell vereinnahmt wird. Der Zahlbegriff bleibt noch ordinal.

Kardinalzahlbegriff – Längen und Mengen

Es wäre ein Trugschluss, zu glauben, dass ein Kind, welches auf dem Metermass korrekt zählen (zeigen und sprechen) kann, das Längenmass bereits verstanden habe. Denn das Längenmass hat den nicht-ordinalen Charakter einer Kardinalzahl und gibt die Mächtigkeit einer Menge – die Gesamtlänge – bestehend aus Einheitslängen an. Das ganzheitliche Erfassen der Mächtigkeit ist der eigentliche Entwicklungsschritt von der Ordinal- zur Kardinalzahl. Dieser Schritt wird kaum mittels reiner Zahlen, wie sie bisher ausgesprochen und gezeigt worden sind, sondern nur mit Hilfe von konkreten Sorten (Masseinheiten) zu schaffen sein. Immer wieder tauchen Geschichten auf, bei denen von «vier Äpfeln», «achtzehn Kindern» usw. die Rede ist. Dann führt das Abzählen zur Einsicht, dass «soundsoviele Stücke» vorhanden sind (s. Abb. S. 8, links).

Das Aneinanderreihen von lauter gleichartigen Würfeln und die Mächtigkeit dieser Würfelketten liefert das Längenmass. Dabei ist es wichtig, dass die einzelnen Würfel selbst dann noch sichtbar sind, wenn eine ganze Stange der entsprechenden Länge vorgelegt wird. Immer wieder soll es möglich sein, die rhythmische Abfolge mit dem Finger nachzuvollziehen. Stangen ohne Unterteilungen in Einheiten, wie etwa die Cuisenaire-Stäbchen, sind für den Aufbau des Längenmassbegriffs nicht förderlich und sollten nicht zu früh eingesetzt werden. Ausserdem besteht bei diesem farbigen Material die Gefahr, dass die Zahlen nur noch über die Farbe – also einer vierten Kennzeichnung – erkannt werden, nachdem bereits das geometrische Ziffernbild, die akustische Bezeichnung und der ganzheitliche Mächtigkeitsaspekt (Länge) zu verarbeiten waren. Es soll nicht zu früh das innere rhythmische Abzählen durch eine strukturlose – nur noch farbige – Länge überdeckt werden.



Valeria ist vier Jahre und drei Monate alt und hat vom grossen Bruder Salzteigziffern erhalten. Das alte Spiel des richtigen Auslegens ist nur noch ein Ritual. Jetzt zählt sie die ausgelegten Stücke und zwar von rechts nach links. Sie schiebt die Ziffer 9 zur Seite und sagt: «ein Stück», dann die Ziffer 8 «zwei Stücke», bis zur Ziffer 0 «zehn Stücke!». Die Kardinalzahl «zehn» ist geboren. Valeria hat nach einem Fehlstart bei der Ziffer 0 selber entschieden, bei der Ziffer 9 zu beginnen. Sonst hätte sie beim Anfassen der Ziffer 0 «ein Stück» bei der Ziffer 1 «zwei Stücke» usw. aussprechen müssen, was ihr doch zu verwirrend war.

Ordinalzahl	Kardinalzahl
Rhythmus, Musik, Schreiten	Mächtigkeit, Grössen, Längen
Zeit	Raum
Prozesse, Dynamik	Beziehungen, Statik
Funktionales Denken	Prädikatives Denken

Längenmasse verstehen

Damit ein lebendiges Bild verschiedenster Längenmasse und ihrer Einheiten aufgebaut wird, kann man den Kindern je nach Entwicklungsstand Aufträge geben, bei denen der rhythmische Abzähleffekt besonders zum Ausdruck kommt. Entscheidend ist, dass das Kind immer wieder eigene Masseinheiten festlegen kann: «Wie viele Handspannen gross ist der Küchentisch?» Die Hand regelmässig auflegen und gleichzeitig zählen. Das Gleiche geschieht beim Messen eines Weges mit Schritten, welche natürlich unterschiedlich lang sind. Durch das fortlaufende Abtragen der Masseinheit kommt das rhythmische Abzählen (vorläufig noch ohne eine Bündelung in der Art eines Musiktaktes) bei jeder Längenmessung wieder ins Spiel. Dies nachdem beim Aufbau des

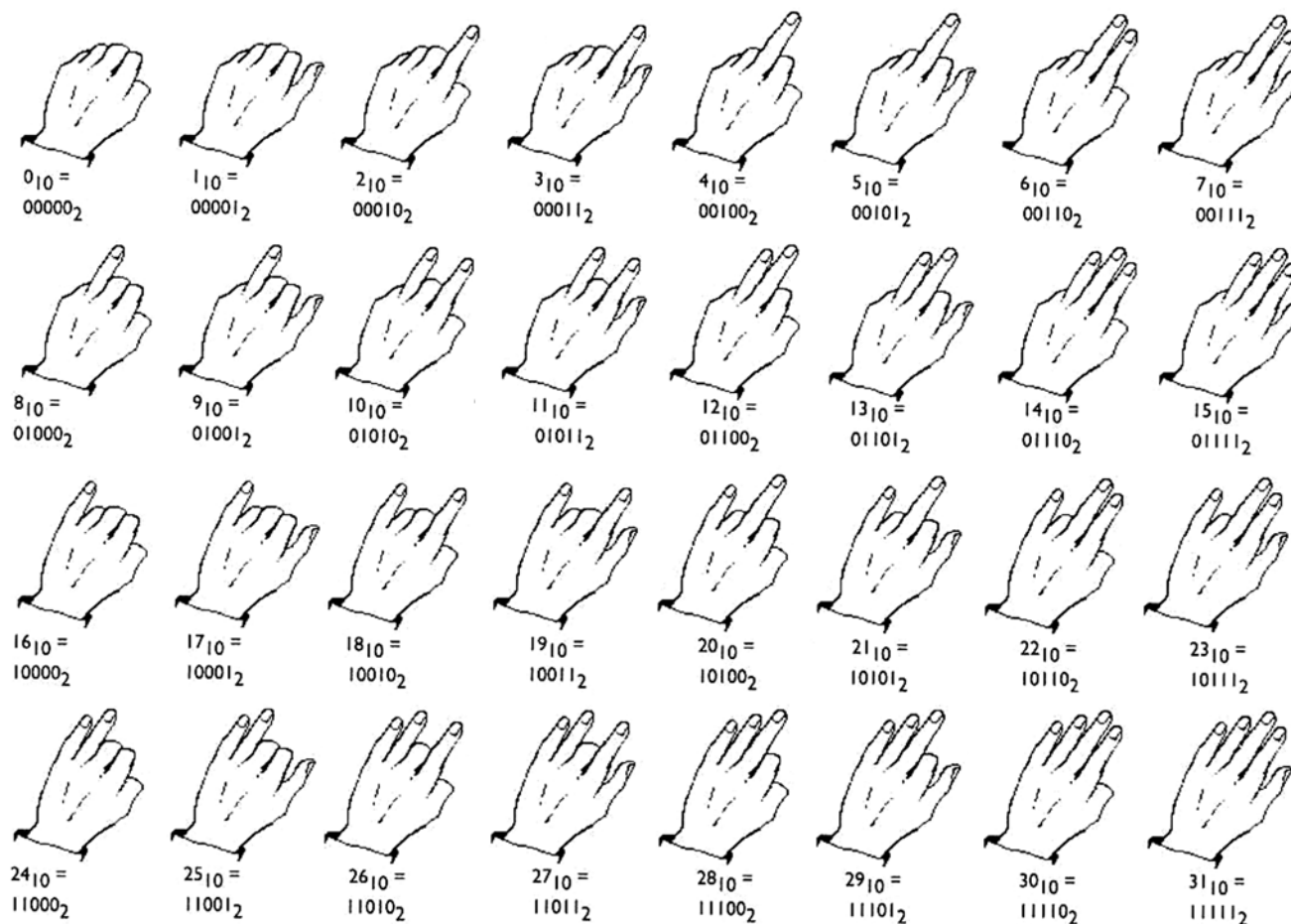
Längenmassbegriffs streng genommen ja gerade dieser zeitliche Aspekt eliminiert und die zeitlose, räumliche Gesamtschau der Mächtigkeit wichtig geworden ist. Bei dieser Rückbesinnung auf den zeitlichen Aspekt der an sich zeitlosen mathematischen Objekte handelt es sich um ein didaktisches Verfahren zum Ausgleich von «funktionalem» und «prädikativem» Denken. Erfolgreiches mathematisches Handeln basiert auf dem ausgewogenen Zusammenspiel beider Denkweisen: Das funktionale Denken betont das zeitliche Nacheinander – das Funktionieren, das Prozesshafte und wird im Mathematikunterricht oft vernachlässigt; das prädikative Denken befasst sich mit statischen Eigenschaften dem Zeitlosen, den ganzheitlichen Beziehungen, wie das auch beim Längenmass der Fall ist. (Schwank 2003)

Beim Vergleich der individuellen Resultate aller Kinder wird das Umrechnen verschiedener Masse zentral. Fragen wie «Wer hat mehr?» oder «Was ist grösser?» sind für die Kinder wichtig und interessant. Wenn die Objekte, welche vermessen worden sind, nicht mehr greifbar sind, müssen die Messresultate selbst miteinander verglichen werden. Das gilt natürlich nicht nur für Längenmasse, sondern auch für andere Grössen wie Gewicht, Zeit, Hohlmasse, Geld usw. (Im Lehrbuch «ich-du-wir 1 2 3» sind Musterbeispiele von Aufträgen zum Zählen und Messen verfügbar.) Damit erfüllen die sogenannten «Bring-mit»-Aufträge, bei denen die Kinder individuell verschiedene Masse aus ihrem persönlichen Umfeld in die Schule mitbringen, eine doppelte Funktion: Zum Einen schaffen sie den persönlichen Bezug zu einer Masseinheit, zum Anderen drängen sie zur Einsicht, dass eine Vereinheitlichung und sichere Umrechnung für den Vergleich und die Kommunikation mit anderen wichtig sind.



Valeria ist siebeneinhalb Jahre alt und zeigt eine Zahl mit ihren Fingern: Welche?

Erst in einem späteren Schritt werden die normierten Längenmasse thematisiert. Dabei wird mit Vorteil jede allgemein gebräuchliche Längenmasseinheit mit bestimmten Personen in Beziehung gebracht: Jede Berufsgattung hat



Aus Ruf/Gallin: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1

Rhythmisches Zählen im Zweisystem als herausfordernde Fingerübung: Ein gestreckter Finger bedeutet 1, ein eingezogener bedeutet 0. Damit werden die Zahlen von 0 bis 31 durch eine fünfstellige Ziffernfolge aus Nullen und Einsen dargestellt.

ihre bevorzugten Masseinheiten. So geben beispielsweise Schreiner ihre Längen immer in Millimetern an. Das machen die Velorennfahrer sicherlich anders. Diese Thematik wird aber erst in der Mittelstufe fundiert ausgebaut.

Akrobatisches Zählen mit den Fingern

Kehren wir zum Schluss zurück zu kleineren Kindern und dem rhythmischen Zählen. Bereits im Alter von etwa sieben Jahren sind Kinder in der Lage, mit ihren Fingern nicht nur in traditioneller Art zu zählen, sondern haben durchaus Spass an akrobatischeren Fingerübungen: Im Gegensatz zu Erwachsenen schaffen sie es recht leicht, mit den Fingern im Zweisystem zu zählen (s. Abb. S 8, rechts).

Dabei wird der Daumen rhythmisch von Zahl zu Zahl gestreckt bzw. eingezogen. So erfolgt eine Bündelung von je zwei Einheiten, der musikalische Zweiertakt entsteht. Der Zeigefinger hat einen doppelt so langsamen Rhythmus: Er bewegt sich nach jeweils zwei aufgesagten Zahlen, der Mittelfinger bewegt sich nochmals halb so schnell usw.

Mit dieser Fingerübung wird erneut betont, wie sehr mathematische Grundbegriffe einen gleichsam musikalischen, rhythmischen Charakter haben. So wird z.B. das Zählen im Vierersystem (00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13,

20, 21, 22, 23, usw.) mit seiner Viererbündelung zum bekannten Vierertakt in der Musik.

Soll die Thematik der Längenmasse und ihrer Handhabung zu einem bleibenden und sicheren Wissensbestand der Kinder werden, dürfen rhythmische Auflösungen der starren räumlichen Ausdehnungen nicht zu kurz kommen.

Peter Gallin ist Lehrbeauftragter für Fachdidaktik Mathematik an der Universität Zürich.

Literatur

Urs Ruf, Peter Gallin: *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik (Band 1) und Spuren legen – Spuren lesen. Unterricht mit Kernideen und Reisetagebüchern (Band 2).* 3. überarbeitete Auflage der 1. Auflage 1998, Seelze-Velber Kallmeyer, 2005

Inge Schwank: *Einführung in prädikatives und funktionales Denken. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), ZDM-Themenheft «Zur Kognitiven Mathematik», 70–78, 2003*

Kurt Hess: *Lehren – zwischen Belehrung und Lernbegleitung. Dissertation an der Universität Zürich, 2002, <http://edudoc.ch/record/3008/>*
 Urs Ruf, Peter Gallin: *ich-du-wir 1 2 3. Lehrmittelverlag des Kt ZH, 1995*
 Peter Gallin, Urs Ruf: *ich-du-wir 4 5 6. Lehrmittelverlag des Kt ZH, 1999*