Die Symmediane

Peter Gallin, Kantonsschule Zürcher Oberland in Wetzikon

Neulich sind zwei Publikationen fast gleichzeitig erschienen, in denen ein vergessenes Thema der Planimetrie aufgeriffen wurde: In der Zeitschrift $\sqrt{WURZEL}$, Heft 5/01, beweist Darij Grinberg aus Karlruhe einen verallgemeinerten Satz zur Symmedianen und im Bulletin des VSMP Nr. 86 weist Jean Piquerez aus Genf mit Hilfe der Vektorrechnung nach, dass die Symmedianen eines Dreiecks durch einen einzigen Punkt, den Lemoine-Punkt, gehen. Ich möchte hier mit einfachen planimetrischen und trigonometrischen Mitteln die zwei Haupteigenschaften der Symmedianen zusammenstellen.

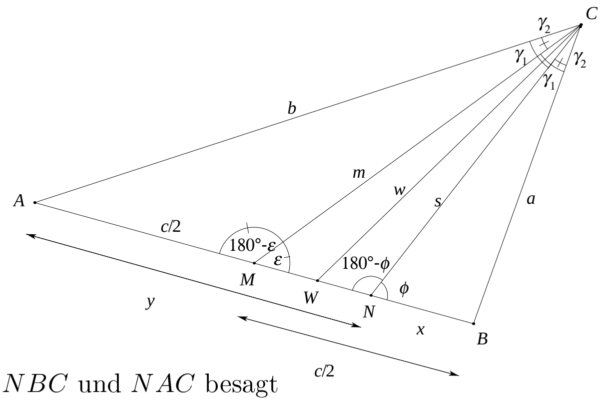
Definition: Spiegelt man eine Schwerlinie m des Dreiecks ABC an der entsprechenden Winkelhalbierenden w, so erhält man die sogenannte Symmediane s.

Nun sind zwei Sätze zu beweisen:

Satz 1: Die Symmediane durch eine Ecke eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Quadrat des Verhältnisses der beiden anliegenden Seiten.

Bemerkung: Die Winkelhalbierende durch eine Ecke eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten. Die Symmediane verstärkt also das Verhältnis durch Quadrieren.

Satz 2: Die drei Symmedianen scheiden sich in einem Punkt (Lemoine-Punkt).



Beweis von Satz 1: Der Sinussatz in den beiden Dreiecken NBC und NAC besagt

$$\frac{a}{\sin\phi} = \frac{x}{\sin\gamma_2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sin(180^o - \phi)} = \frac{y}{\sin\gamma_1} \ .$$

Dividiert man die linke Gleichung durch die rechte und beachtet $\sin(180^o - \phi) = \sin\phi$, ergibt sich

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} \ .$$

Nun kann hier das Verhältnis der beiden Sinus durch den Sinussatz in den Dreiecken MBC und MAC bestimmt werden. Dabei ist entscheidend, dass bei der Ecke C die Teilwinkel γ_1 resp. γ_2 über Kreuz gleich sind und dass der Punkt M die Seite c halbiert:

$$\frac{a}{\sin\epsilon} = \frac{c/2}{\sin\gamma_1} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sin(180^o - \epsilon)} = \frac{c/2}{\sin\gamma_2} \ .$$

Dividiert man wiederum die linke Gleichung durch die rechte, ergibt sich mit $\sin(180^o - \phi) = \sin\phi$

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{a}{b} \ .$$

Damit ist das Verhältnis der beiden Sinus bekannt und es ist bewiesen, dass

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2} \ .$$

Beweis von Satz 2: Zeichnet man alle drei Symmedianen im Dreieck ABC ein, so teilt jene durch C die Seite c im Verhältnis $\frac{a^2}{b^2}$. Zyklisch weiterschreitend teilt damit jene durch A die Seite a im Verhältnis $\frac{b^2}{c^2}$ und jene durch B die Seite b im Verhältnis $\frac{c^2}{a^2}$. Das Produkt der drei Verhältnisse ergibt nun aber genau 1. Somit folgt aus dem Satz von Ceva, dass sich die drei Symmedianen in einem Punkt schneiden müssen.